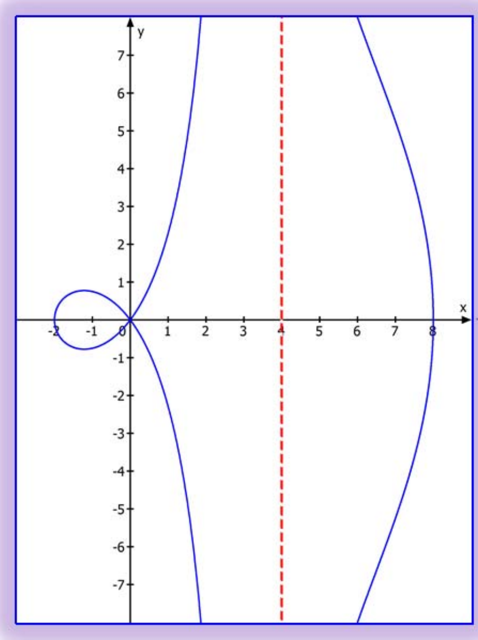


Konchoiden

Text Nr. 54130

Stand 19. Mai 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Konchoide des Nikomenes ist schon seit über 2000 Jahren berühmt. Ein berühmter Hund zerrt an der Leine seines Herrchens und will unbedingt zu seinem Baum, was den spazieren gehenden Hundehalter aber nicht interessiert. Und so bleibt dem braven Hund nichts anderes, als sich auf einer Konchoide zu bewegen.

Diese Kurven bieten Stoff für sehr viele Seiten. Ich musste irgendwann einfach aufhören damit …

Bei der Berechnung der Fläche der Konchoidenschleife muss man dieses Integral berechnen:

$$F = \frac{1}{2} \int_{2{,}2143}^{4.06889} \left(\frac{3}{\cos(\varphi)} + 5 \right)^2 d\varphi$$

Das ist unglaublich schwer zu knacken. Ich habe die Berechnung in den Anhang verlegt. Es lohnt sich, da mal hineinzuschauen …

Inhalt

Konchoide (Hundekurve, Muschelkurve)

1 Vorschau

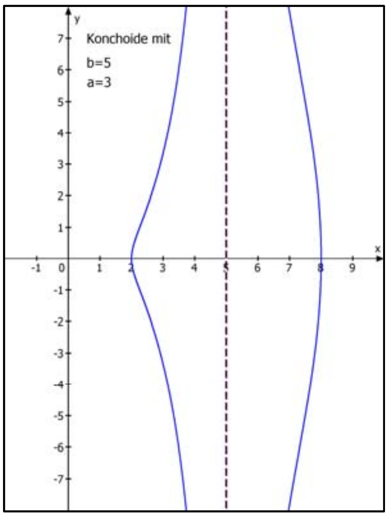
a) Koordinatengleichung: $(x-b)^2 \cdot (x^2+y^2) = a^2x^2$

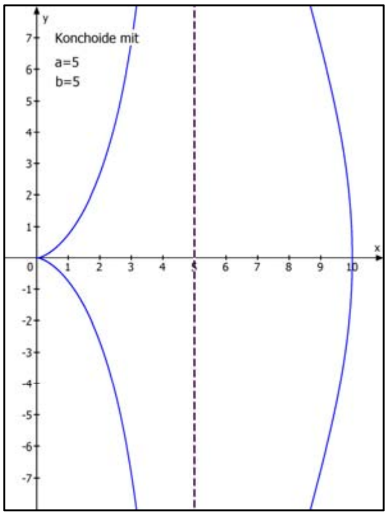
Ersatzfunktionen: $f_{1,2}(x) = \pm \frac{x}{x-b}\sqrt{a^2-(x-b)^2}$

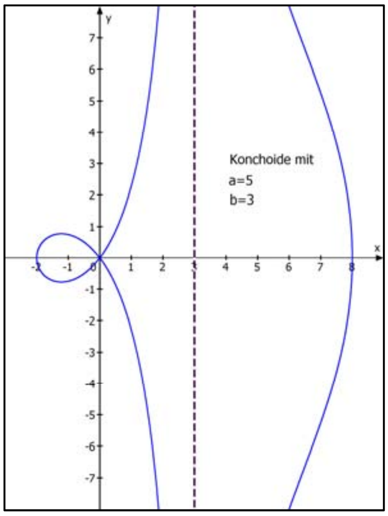
b) Parametergleichung: $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} b + a \cdot \cos(\varphi) \\ b \cdot \tan(\varphi) + a \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

c) Gleichung mit Polarkoordinaten: $r = \frac{b}{\cos(\varphi)} \pm a$

Für a = b entsteht eine Spitze im Ursprung und für a > b entsteht seine Schleife







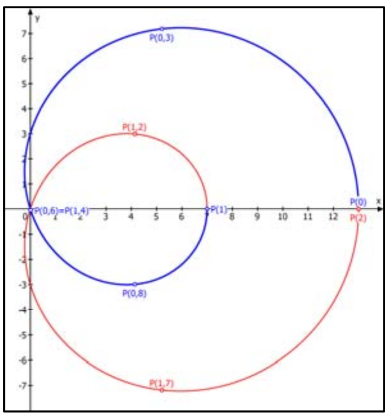
Kreiskonchoide:

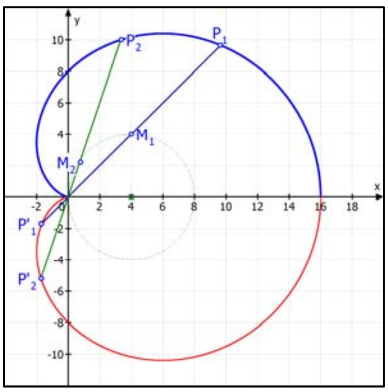
a) Koordinatengleichung: $(x^2+y^2-2ax)^2 - c^2(x^2+y^2) = 0$

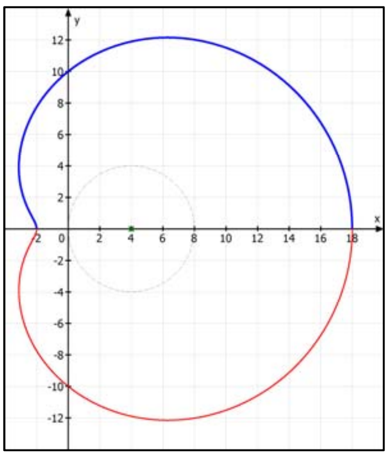
b) Parametergleichung: $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos^2(\varphi) + 3 \cdot \cos(\varphi) \\ 5 \cdot \sin(2\varphi) + 3 \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ (Beispiel)

c) Gleichung mit Polarkoordinaten: $r = 2a \cdot \cos(\varphi) \pm c$

Beispielkurven:



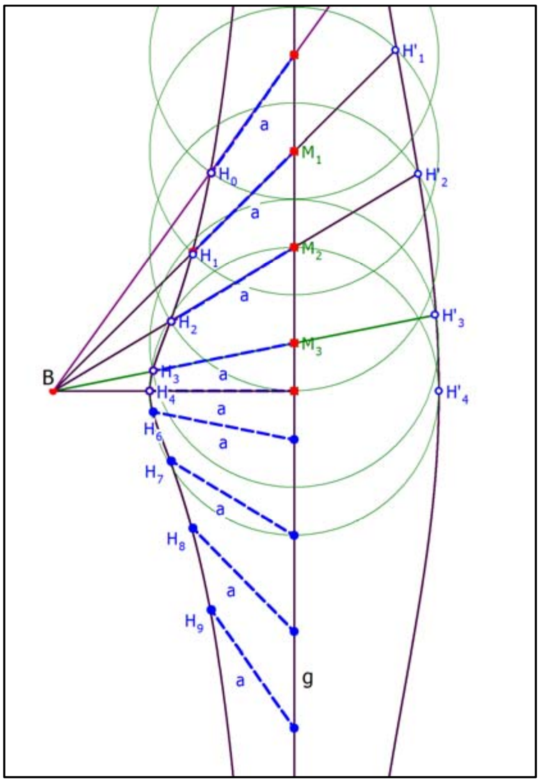




2. Warum diese Kurve auch Hundekurve heißt

Nikomedes war ein griechischer Mathematiker. Er lebte v on etwa 280 v. Chr.- bis 210 v. Chr.
Er führt die Konchoide ein, mit der er glaubte, verschiedene Probleme der Antike lösen zu können.

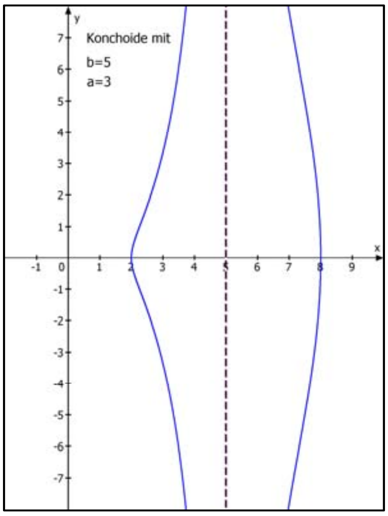
Man kann die Konchoide mit einem anschaulichen Beispiel einführen.

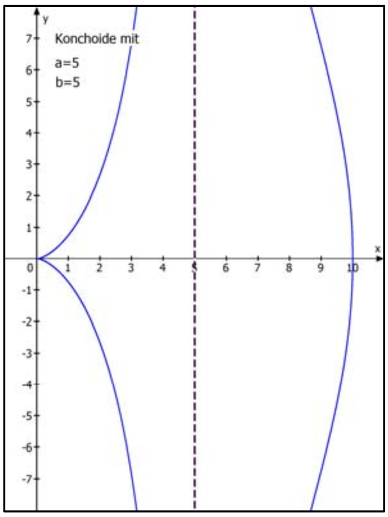


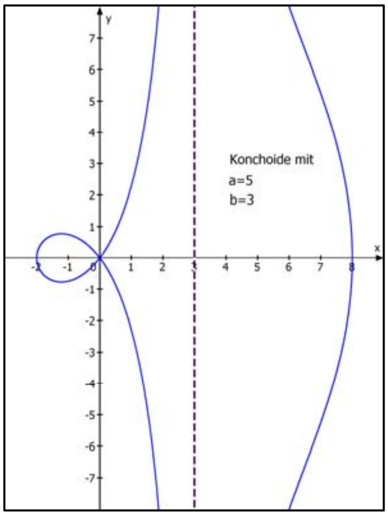
Ein Mensch M geht mit seinem Hund H spazieren.
M bewegt sich auf einer Geraden g und hat den Hund an einer festen Leine der Länge a. Im Abstand b von der Straße steht ein Baum B. Der Hund fühlt sich magisch von diesem angezogen und versucht, immer direkt in Richtung Baum zu gehen. Dabei bewegt er sich auf der „Konchoide“:

Zur Konchoide gehört ein zweiter Kurvenast, hier rechts von g. Auf der würde sich der Hund bewegen, wenn am Baum irgend ein böses Tier sitzt und dem Hund Angst macht, so dass er in die entgegengesetzte Richtung flüchten will.
Das wären dann die Punkte H_1', H_2', H_3', H_4' usw.

Die Form der Kurve hängt natürlich von der Länge a der Leine ab. Ist sie kleiner als der Abstand b des Baumes von der Straße, dann macht sie nur eine Welle, Für a = b entsteht eine Spitze im Ursprung und für a > b entsteht eine Schleife, was natürlich der Hund nicht mehr machen würde, hier wirkt dann nur die mathematisierte Idealversion nach …



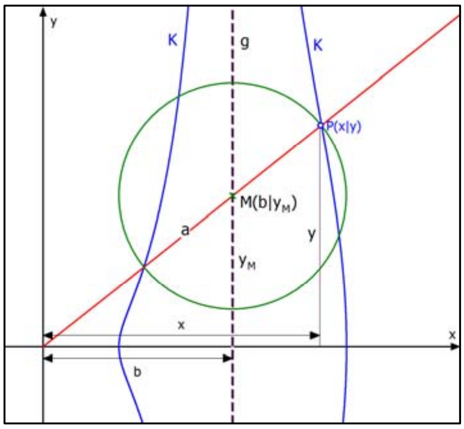




3 Herleitung von Gleichungen für die vertikale Lage

a) Die Koordinatengleichung

Der wandernde Kreismittelpunkt sei $M(b\,|\,y_M)$, sein Radius sei a.



Kreisgleichung: $(x-b)^2+(y-y_M)^2=a^2$ (1)

2. Strahlensatz: $\frac{y_M}{b}=\frac{y}{x} \Rightarrow y_M=\frac{b\cdot y}{x}$ (2)

(2) in (1):

$$(x-b)^2+\left(y-\frac{b\cdot y}{x}\right)^2=a^2$$

$$(x-b)^2+\left(\frac{x\cdot y-b\cdot y}{x}\right)^2=a^2$$

$$(x-b)^2+(x-b)^2\frac{y^2}{x^2}=a^2 \qquad |\; x^2$$

$$(x-b)^2\cdot x^2+(x-b)^2\cdot y^2=a^2x^2$$

$$(x-b)^2\cdot\left(x^2+y^2\right)=a^2x^2 \qquad (3)$$

b) Die Polarkoordinatengleichung:

$x=r\cdot\cos(\varphi),\; y=r\cdot\sin(\varphi)$ einsetzen:

$$(r\cdot\cos(\varphi)-b)^2\cdot\underbrace{\left(r^2\cdot\cos^2(\varphi)+r^2\cdot\sin^2(\varphi)\right)}_{r^2}=a^2\cdot r^2\cdot\cos^2(\varphi) \qquad |\;:r^2$$

$$(r\cdot\cos(\varphi)-b)^2=a^2\cdot\cos^2(\varphi) \qquad |\;\sqrt{\;}$$

$$r\cdot\cos(\varphi)-b=\pm a\cdot\cos(\varphi)$$

$$r=\frac{b}{\cos(\varphi)}\pm a \qquad (4)$$

c) Parametergleichungen :

$$\vec{x}(\varphi)=\begin{pmatrix} b+a\cdot\cos(\varphi) \\ b\cdot\tan(\varphi)+a\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix} \qquad (5)$$

Herleitung: Es ist $x=r\cdot\cos(\varphi)=\left(\frac{b}{\cos(\varphi)}+a\right)\cdot\cos(\varphi)=b+a\cdot\cos(\varphi)$

und $y=r\cdot\sin(\varphi)=\left(\frac{b}{\cos(\varphi)}+a\right)\cdot\sin(\varphi)=b\cdot\tan(\varphi)+a\cdot\sin(\varphi)$

d) Ersatzfunktionen:

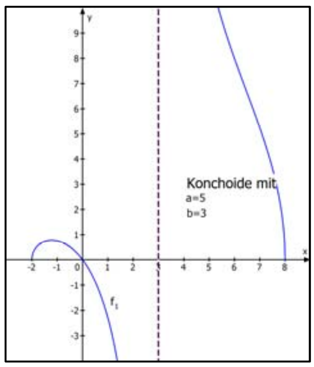
Man kann (3) nach y umstellen: $(x-b)^2\cdot\left(x^2+y^2\right)=a^2x^2$

$$x^2+y^2=\frac{a^2x^2}{(x-b)^2} \Rightarrow y^2=\frac{a^2x^2}{(x-b)^2}-x^2=\frac{a^2x^2-x^2(x-b)^2}{(x-b)^2}=\frac{x^2}{(x-b)^2}\cdot\left[a^2-(x-b)^2\right]$$

Also: $y=\pm\frac{x}{x-b}\sqrt{a^2-(x-b)^2}$

bzw. $f_1(x)=\frac{x}{x-b}\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ (6a) →

und $f_2(x)=-\frac{x}{x-b}\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ (6b)



4 Kurvenuntersuchung

a) **Definitionsbereich**: Bedingung: $a^2 - (x-b)^2 \geq 0$

$a^2 \geq (x-b)^2$ bzw. $(x-b)^2 \leq a^2$

$|x-b| \leq |a|$

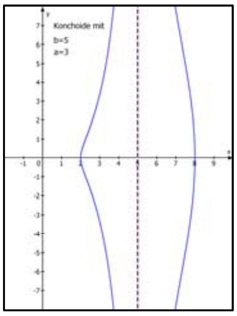
Es sei ab jetzt a > 0: $2 \leq x \leq 8 \qquad |x-b| \leq a$

$-a \leq x-b \leq a \quad | +b$

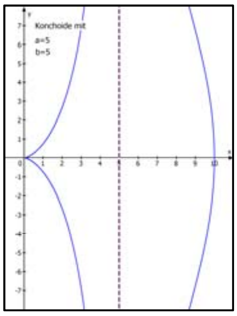
$b-a \leq x \leq a+b$

Ich habe auf Seite 39 drei Fälle dargestellt:

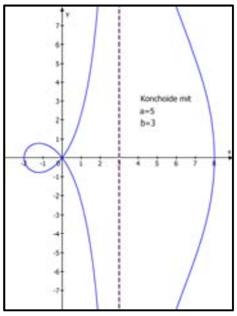
1. Fall: a = 3, b = 5, also a < b: $2 \leq x \leq 8$



2. Fall: a = b = 5 also a = b $0 \leq x \leq 10$



3. Fall: a = 5, b = 3 also a > b $-2 \leq x \leq 8$



Um den Definitionsbereich vollständig zu erfassen, muss man beachten, dass

$f_{1,2}(x) = \pm\frac{x}{x-b}\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ noch einen Nenner hat, sodass man noch $x \neq b$ verlangen muss. Also gilt: $\mathbf{D} = [b-a\,;\,a+b] \setminus \{b\}$

Untersuchung der Stelle x = b:

$$\lim_{x\to b} f_1(x) = \lim_{x\to b}\frac{b}{x-b}\sqrt{a^2-(x-b)^2} = \lim_{x\to b}\frac{b}{x-b}\sqrt{a^2-(b-b)^2} = \lim_{x\to b}\frac{ba}{x-b} \quad "=\infty"$$

Analog folgt: $f_2(x) \to \infty$ für $x \to b$

Ergebnis: Die Konchoide hat die **senkrechte Asymptote** x = b.

b) **Schnittpunkte mit der x-Achse:**

Bedingung: y = 0, d. h. $(x-b)^2 \cdot \left(x^2 + \boxed{0}^2\right) = a^2x^2$

$$(x-b)^2 x^2 - a^2x^2 = 0$$

$$x^2\left((x-b)^2 - a^2\right) = 0$$

Dieses Nullprodukt wird Null, wenn

1. $x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ist (doppelte Lösung) falls x im Definitionsbereich liegt.
2. $(x-b)^2 = a^2 \quad | \sqrt{\ } \quad \Leftrightarrow \quad |x-b| = a$ (a war als > 0 vorausgesetzt)

Das führt zu $x-b = \pm a \quad \Leftrightarrow \quad x = b \pm a = \begin{cases} b+a \\ b-a \end{cases}$

Das sind die äußeren Randstellen des Definitionsbereichs.

c) **Symmetrieverhalten:**

Das Schaubild lässt vermuten, dass die Konchoide symmetrisch zur x-Achse ist.

Das kann man dadurch bestätigen, dass die Koordinatengleichung $(x-b)^2 \cdot (x^2+y^2) = a^2x^2$ nur y^2 enthält, sodass mit einem Kurvenpunkt $P(x\,|\,y)$ auch der Punkt $P(x\,|-y)$ auf der Konchoide liegt.

Oder man betrachtet die beiden Ersatzfunktionen. Hier gilt: $f_2(x) = -f_1(x)$ für alle $x \in \mathbf{D}$.

Der Graph von f_1 beschreibt den über der x-Achse liegenden Kurventeil, f_2 den unteren.

d) **Ableitungen:**

Man sollte nicht versuchen, die Ersatzfunktionen abzuleiten, denn da kommt alles zusammen: Quotientenregel, Produktregel und Ableitung der Wurzelfunktion.

Geeigneter ist hier das Verfahren der **impliziten Ableitung**:

$$(x-b)^2 \cdot (x^2+y^2) = a^2x^2$$

Produktregel:
$$\underbrace{2(x-b)}_{u'} \cdot (x^2+y^2) + \underbrace{(x-b)^2 \cdot \underbrace{(2x+2y\cdot y')}_{v'}}_{\text{zerlegen}} = a^2 \cdot 2x$$

$$2(x-b)\cdot(x^2+y^2) + (x-b)^2 \cdot 2x + (x-b)^2 \cdot 2y \cdot y' = a^2 \cdot 2x \quad | :2$$

$$(x-b)\cdot(x^2+y^2) + (x-b)^2 \cdot x + (x-b)^2 \cdot y \cdot y' = a^2 \cdot x \quad | \cdot (x-b)$$

Wenn man jetzt die Gleichung mit $(x-b)$ multipliziert, wird der erste Summand zu $(x-b)^2 \cdot (x^2+y^2)$ und das ist = a^2x^2, wie die Kurvengleichung zeigt:

$$a^2x^2 + (x-b)^3 \cdot x + (x-b)^3 \cdot y \cdot y' = a^2x \cdot (x-b)$$

Umstellen nach y':
$$(x-b)^3 \cdot y \cdot y' = a^2x\cdot(x-b) - a^2x^2 - (x-b)^3 \cdot x$$

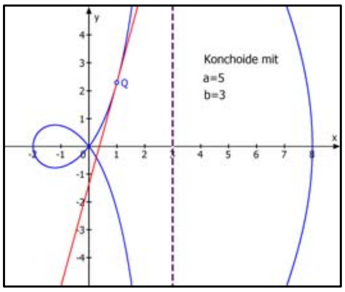
$$y' = \frac{a^2x\cdot(x-b) - a^2x^2 - (x-b)^3\cdot x}{(x-b)^3 \cdot y}$$

Vereinfachen:
$$y' = \frac{\cancel{a^2x^2} - a^2x\cdot b - \cancel{a^2x^2} - (x-b)^3 \cdot x}{(x-b)^3 \cdot y}$$

$$y' = -\frac{x}{y}\cdot\frac{a^2\cdot b + (x-b)^3}{(x-b)^3} \quad \text{oder} \quad y' = -\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{a^2\cdot b}{(x-b)^3}+1\right) \quad \text{für } x \neq b,\ y \neq 0$$

Für Schüler wird das Ergebnis ungewohnt aussehen, denn der Ableitungsterm enthält auch noch y.

Man muss also zur Werteberechnung beide Punktkoordinaten einsetzen.



Rechts sehen wir die Konchoide für a = 5 und b = 3.

Ihre Gleichung ist $(x-3)^2 \cdot (x^2+y^2) = 25 \cdot x^2$

Dann berechne ich einen Kurvenpunkt Q mit $x_Q = 1$.

x = 1 einsetzen: $4(1+y^2) = 25 \;\Rightarrow\; 1+y^2 = \frac{25}{4} \;\Leftrightarrow\; y^2 = \frac{21}{4}$

y-Koordinaten: $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{21} \approx \pm 2{,}29$

Dann bestimmen wir die Gleichung der Tangente in $Q(1\,|\,2{,}29)$:

Ableitungsfunktion: $y' = -\frac{x}{y}\cdot\frac{75+(x-3)^3}{(x-3)^3}$ Steigung in Q: $m = -\frac{1}{2{,}29}\cdot\frac{75-8}{-8} \approx 3{,}66$

Tangente: $y - 2{,}29 = 3{,}66(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = 3{,}66\cdot x - 1{,}37$

e) Unsere Konchoide hat im Ursprung einen Doppelpunkt.
Welchen Winkel bilden die Tangenten in O?

Da gibt es plötzlich ein Problem: Wenn man den Ursprung in $y' = -\frac{x}{y} \cdot \frac{75 + (x-3)^3}{(x-3)^3}$ einsetzen will,

erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Daher sollte man für y den Term der Ersatzfunktion f_1 einsetzen: $y = f_1(x) = \frac{x}{x-3}\sqrt{25-(x-3)^2}$

Das ergibt:

$$y' = -\frac{x}{\frac{x}{x-3}\sqrt{25-(x-3)^2}} \cdot \frac{75+(x-3)^3}{(x-3)^3} = -\frac{(x-3)}{\sqrt{25-(x-3)^2}} \cdot \frac{75+(x-3)^3}{(x-3)^3} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{25-(x-3)^2}} \cdot \frac{75+(x-3)^3}{(x-3)^2}}$$

Nach Herauskürzen von x und einer Klammer kann man x = 0 einsetzen:

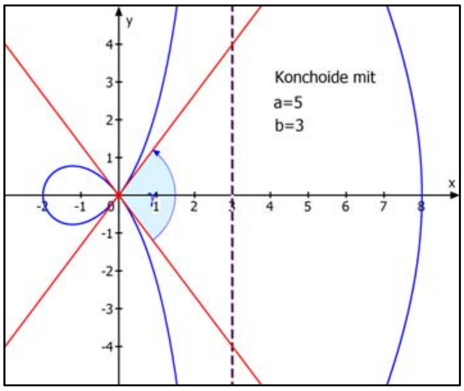
$$m_1 = f_1'(0) = -\frac{1}{\sqrt{25-9}} \cdot \frac{75-27}{9} = -\frac{48}{36} = -\frac{4}{3}$$

Für die zweite Ersatzfunktion gilt: $m_2 = f_2'(0) = \frac{4}{3}$

Der Steigungswinkel ist also $\gamma = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ und der Schnittwinkel ist doppelt so groß:

-

$$\boxed{2\times\tan^{-1}\frac{4}{3} \quad 106.26}$$



f) Wo hat die Konchoide senkrechte Tangenten?

Für unsere gezeichnete Kurve gilt ja

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{25-(x-3)^2}} \cdot \frac{75+(x-3)^3}{(x-3)^2}$$

Eine senkrechte Tangente liegt dort vor, wo y' eine Polstelle hat, die im Definitionsbereich liegt.
Der Nenner wird Null für x = 3, die aber nicht zu D gehört (senkrechte Asymptote),
aber auch für $25-(3-x)^2 = 0 \Leftrightarrow (3-x^2) = 25 \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow |3-x| = 5 \Leftrightarrow 3-x = \pm 5$

Daraus folgt: $x = 3 \mp 5 = \begin{cases} -2 \\ 8 \end{cases}$.

In den Randpunkten $L(-2 \mid 0)$ und $R(8 \mid 0)$ gibt es also senkrechte Tangenten.

Dies kann man auch allgemein untersuchen: $y' = -\frac{x}{y} \cdot \frac{a^2 \cdot b + (x-b)^3}{(x-b)^3}$

Der Nenner wird zunächst einmal für x = b Null, das ist die Polstelle.

Und dann für y = 0. Dies führt zu den Schnittpunkten mit der x-Achse:

$S_1(0 \mid 0)$, $S_2(b-a \mid 0)$, $S_3(a+b \mid 0)$.

Man muss nun den Ursprung herausnehmen, denn dort (wenn $0 \in D$) existiert eine bzw. zwei Tangentensteigungen.

g) Wo hat die Konchoide waagerechte Tangenten?

Unsere spezielle Konchoide mit $y' = -\frac{1}{\sqrt{25-(x-3)^2}} \cdot \frac{75+(x-3)^3}{(x-3)^2}$ hat eine waagerechte

Tangente wenn $75+(x-3)^2 = 0$ ist. Das führt zu

$$(x-3)^3 = -75 \quad \Leftrightarrow \quad x-3 = -\sqrt[3]{75} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3-\sqrt[3]{75} \approx -1{,}22$$

y-Koordinate: $y = f_1(x) = \frac{x}{x-3}\sqrt{25-(x-3)^2}$

$$y = f_1(-1{,}22) = \frac{-1{,}22}{-1{,}22-3}\sqrt{25-(-1{,}22-3)^2} \approx 0{,}78$$

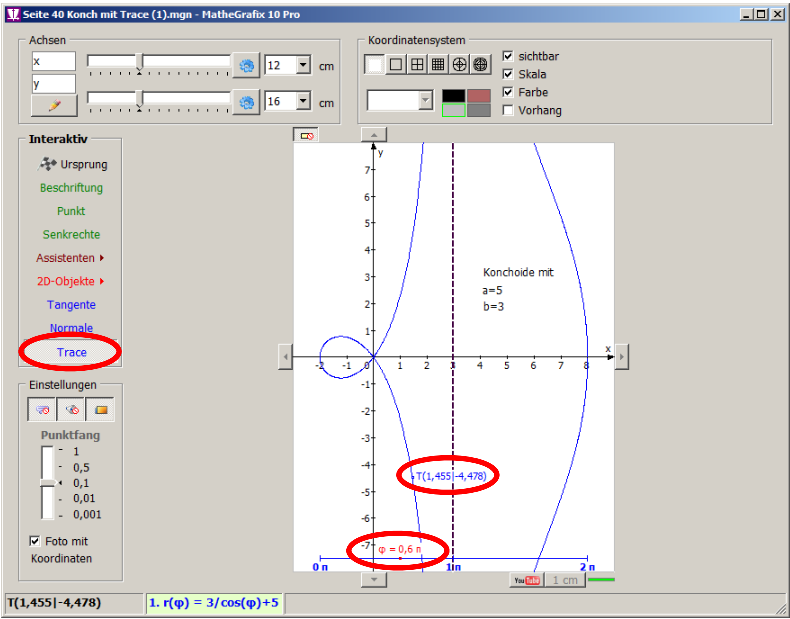
```
Define f(x)=x/(x-3)·√(25-(x-3)^2)
                                   done
Define f1(x)=diff(f(x)
                                   done
f1(0)
                                  -1.33
f1(x)
         -(x^3-9·x^2+27·x+48)
         ----------------------------
         (x-3)^2·√(-x^2+6·x+16)
f(-1.22)
                                   0.78
```

Ergebnis: Damit erhält man die beiden Extrempunkte

$H(-1{,}22 \mid 0{,}78)$ und $T(-1{,}22 \mid -0{,}78)$ der Kurve.

h) Bei der Herleitung der Gleichung für Polarkoordinaten haben sich **zwei Gleichungen** ergeben: $r = \frac{3}{\cos(\varphi)} + 5$ und $r = \frac{3}{\cos(\varphi)} - 5$

Wie wirkt sich das auf die Kurve aus?
Ich zeige dies als Anwendung von MatheGrafix. Zuerst stelle ich die linke Gleichung dar und schalte die Trace-Option ein:

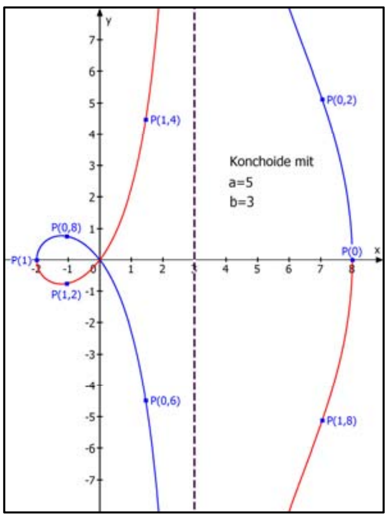


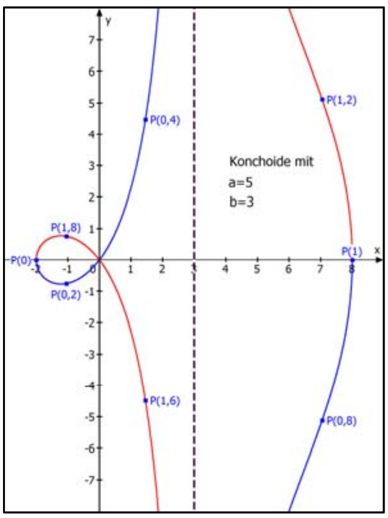
Dann kann man durch Bewegen der Maus erkennen, welcher φ – Wert zum betreffen Kurvenpunkt gehört.

Klickt man dann mit der rechten Maustaste an, wird der Kurvenpunkt im Punkte-Menü gespeichert.

Ich habe dann anschließend die angezeigten Punkt-Koordinaten durch die φ – Werte ersetzt. Dabei bedeutet P(0,6), dass dort $\varphi = 0{,}6\pi$ ist.

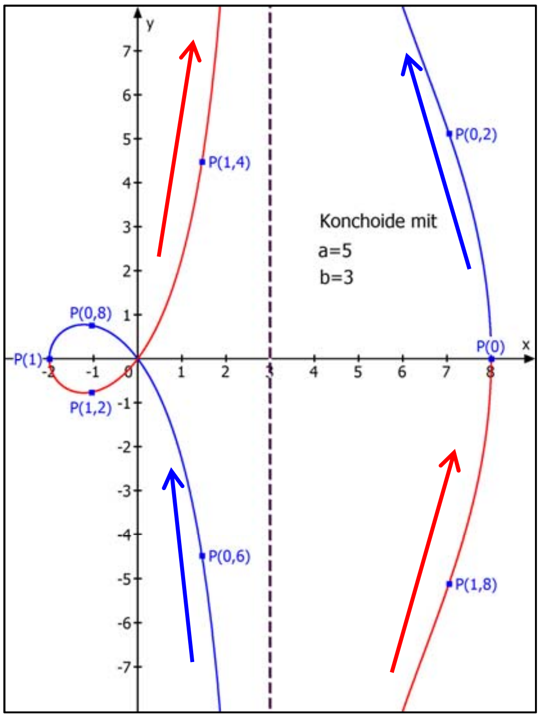
Rechts dasselbe für die Kurve „mit -5" in der Gleichung.

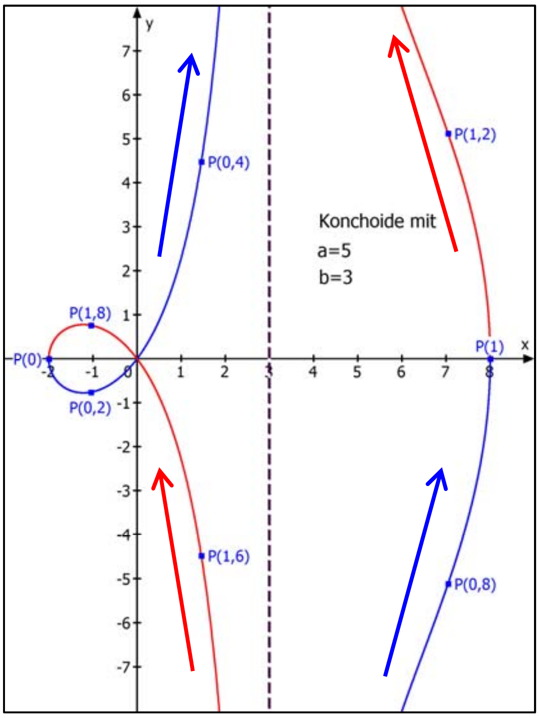




Man erkennt also, dass man dieselbe Kurve erhält, lediglich die φ – Werte sind anders zugeordnet. Beobachten Sie einmal, wie mit zunehmendem φ in $\mathbf{D} = [0; 2\pi[$ die Kurven durchlaufen werden:

Blau: von 0 bis π,
rot: von π bis 2π.





Beginn rechts bei P(0), dann nach oben zur Asymptote von rechts, dann von unten kommend durch die Schleife nach oben zur Asymptote von links, dann wieder von unten kommend nach rechts zu P(0), der mit $P(2\pi)$ identisch ist.

Beginn links bei P(0), dann nach oben zur Asymptote von links, dann von unten kommend nach rechts zu P(1) und weiter nach oben zur Asymptote von rechts, dann von unten kommend nach links durch die halbe Schleife bis P(0) = $P(2\pi)$.

Für welchen Wert von φ erreicht man bei einer der beiden Darstellungen den Ursprung, also den Doppelpunkt?

Da r ja die Strecke $\overline{OP}$ darstellt, muss zu O der Wert r = 0 gehören. Aus der Gleichung folgt dann:

$$r = \frac{3}{\cos(\varphi)} + 5 \qquad \text{bzw.} \qquad r = \frac{3}{\cos(\varphi)} - 5$$

$$0 = \frac{3}{\cos(\varphi)} + 5 \qquad\qquad 0 = \frac{3}{\cos(\varphi)} - 5 \qquad | \cdot \cos(\varphi)$$

$$0 = 3 + 5 \cdot \cos(\varphi) \qquad\qquad 0 = 3 - 5 \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{3}{5} = -0{,}6 \qquad\qquad \cos(\varphi) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Ich habe die Lösung für die linke Gleichung mit dem **CAS-Rechner TI Nspire** berechnen lassen.

cos⁻¹(-0.6)	2.2143
solve(z·π=2.2143,z)	z=0.704834
solve(cos(t)=-0.6,t)	t=6.28319·n2−2.2143 or t=6.28319·n2+2.2143
2·π−2.2143	4.06889
solve(z·π=2.2143,z)	z=0.704834
solve(z·π=4.06889,z)	z=1.29517

Die Rechnung der 1. Zeile nützt nicht sehr viel, denn wir erreichen den Ursprung ja zweimal, und zwar geschätzt für $\varphi_1 \approx 0{,}7\pi$ und dann für $\varphi_2 \approx 1{,}3\pi$.

Daher berechne ich φ (bei CAS heißt es t) in der 3. Zeile als Lösung einer Gleichung. Die angezeigte Lösung heißt $t = n \cdot 2\pi - 2{,}2143$, was für n = 1 zu $\varphi_2 = 4{,}06889$ führt, oder $t = n \cdot 2\pi + 2{,}2143$, woraus mit n = 0 $\varphi_1 = 2{,}2143$ wird.

Mit den letzten beiden Zeile lasse ich mir anzeigen, welche Vielfachen von π dies nun sind:

$\varphi_1 = 2{,}2143 = 0{,}704834 \cdot \pi$ und $\varphi_2 = 4{,}06889 = 1{,}29517 \cdot \pi$.

i) Wie groß ist die von der Konchoide umschlossene Schleifenfläche?

Die letzten Berechnungen haben gezeigt, dass man mittels $r = \frac{3}{\cos(\varphi)} + 5$ den Doppelpunkt O

für $\varphi_1 = 2{,}2143$ und $\varphi_2 = 4{,}06889$ erreicht.

Formel: $F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$

Berechnung: $F = \frac{1}{2}\int_{2{,}2143}^{4.06889} \left(\frac{3}{\cos(\varphi)} + 5\right)^2 d\varphi$

$$0.5 \cdot \int_{2.2143}^{4.06889} \left(\frac{3}{\cos(t)} + 5\right)^2 dt \quad 2.22401$$

Die manuelle Berechnung dieses Integrals (für hoch interessierte Leser) folgt im Anhang.

5 Trainingsaufgabe

Die Konchoide mit der Spitze im Ursprung hat diese Gleichung: $(x-a)^2 \cdot (x^2 + y^2) = a^2x^2$.

a) Berechne a so, dass die Kurve durch $P\left(2 \mid \sqrt{12}\right)$ geht.

b) Berechne implizit die Ableitung y' für a = 4 (Kurve K).

c) Stelle die Gleichung der Tangente an K in P für a = 4 auf.

d) Gib eine Parametergleichung und eine Gleichung in Polarkoordinaten für K an.

6. Herleitung der Gleichungen für die horizontale Lage

a) Koordinatengleichung

Der wandernde Kreismittelpunkt sei $M(x_M \mid b)$, sein Radius sei a.

Kreisgleichung: $(x-x_M)^2+(y-b)^2=a^2$ (1)

2. Strahlensatz: $\frac{b}{x_M}=\frac{y}{x} \Rightarrow x_M=\frac{b\cdot x}{y}$ (2)

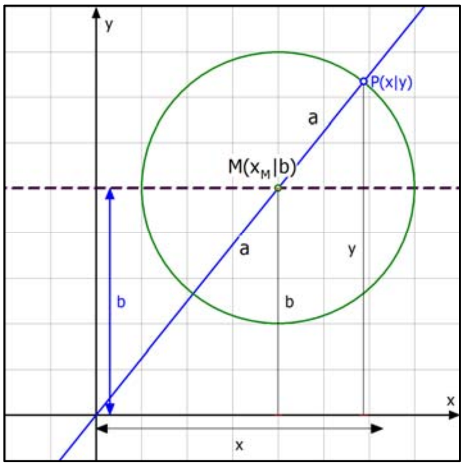
(2) in (1): $\left(x-\frac{b\cdot x}{y}\right)^2+(y-b)^2=a^2$

$$\left(\frac{y\cdot x-b\cdot x}{y}\right)^2+(y-b)^2=a^2$$

$$(y-b)^2\cdot\frac{x^2}{y^2}+(y-b)^2=a^2 \qquad \mid \cdot y^2$$

$$(y-b)^2\cdot x^2+(y-b)^2y^2=a^2\cdot y^2$$

$$\boxed{(y-b)^2\cdot(x^2+y^2)=a^2\cdot y^2}$$



b) Polarkoordinatengleichung:

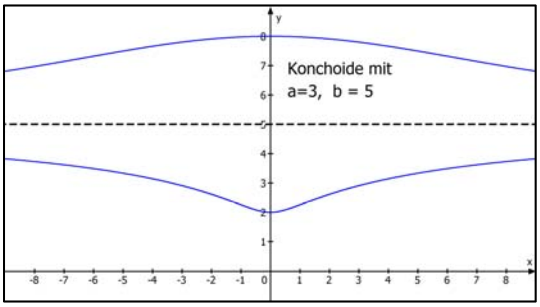
$x=r\cdot\cos(\varphi)$, $y=r\cdot\sin(\varphi)$ einsetzen:

$$(r\cdot\sin(\varphi)-b)^2\cdot\underbrace{(r^2\cdot\cos^2(\varphi)+r^2\cdot\sin^2(\varphi))}_{r^2}=a^2\cdot r^2\cdot\sin^2(\varphi) \qquad \mid :r^2$$

$$(r\cdot\sin(\varphi)-b)^2=a^2\cdot\sin^2(\varphi) \qquad \mid \sqrt{\ }$$

$$r\cdot\sin(\varphi)-b=\pm a\cdot\sin(\varphi)$$

$$\boxed{r=\frac{b}{\sin\varphi}\pm a}$$

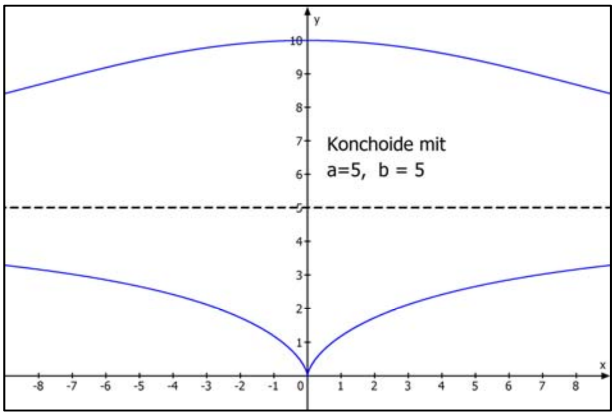


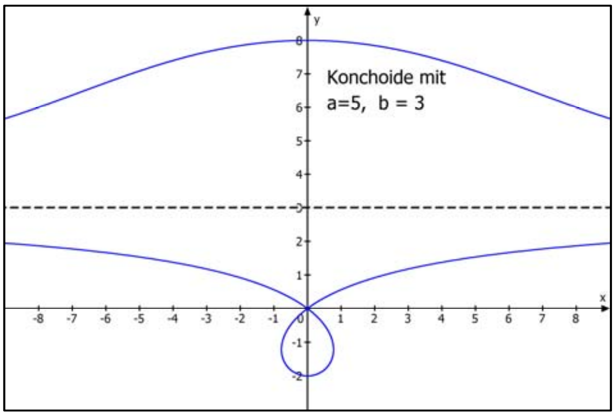
c) Parametergleichung:

$$\boxed{\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\frac{b}{\tan(\varphi)}+a\cdot\cos(\varphi)\\ b+a\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix}}$$

Herleitung: Es ist $x=r\cdot\cos(\varphi)=\left(\frac{b}{\sin(\varphi)}+a\right)\cdot\cos(\varphi)=\frac{b}{\tan(\varphi)}+a\cdot\cos(\varphi)$

und $y=r\cdot\sin(\varphi)=\left(\frac{b}{\sin(\varphi)}+a\right)\cdot\sin(\varphi)=b+a\cdot\sin(\varphi)$

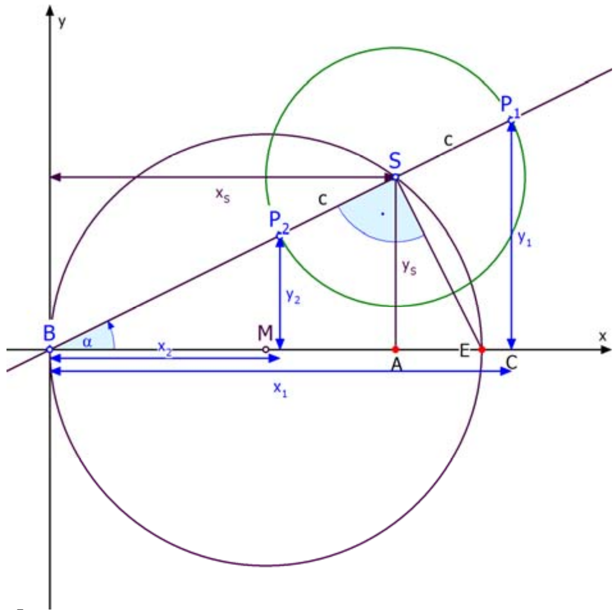




7. Die Kreiskonchoide

Bei der bisher behandelten Konchoide hat sich der Punkt S auf einer Geraden g bewegt.

Wie wird die „Hundekurve“, wenn sich das Herrchen S des Hundes auf einem Kreis bewegt?



Ich untersuche die Lage des Punktes P_1.

Für ihn gilt: $\overline{OP_1} = \overline{OS} + c = 2a \cdot \cos(\alpha) + c$

Dabei ist a der Radius des Kreises, auf dem sich der Mann S bewegt und c die Länge der Hundeleine. Für den inneren Punkt P_2 gilt

analog: $\overline{OP_2} = \overline{OS} - c = 2a \cdot \cos(\alpha) - c$

Diese beiden Gleichungen kann man auch so

schreiben: $\overline{OP_1} - 2a \cdot \cos(\alpha) - c = 0$

und $\overline{OP_2} - 2a \cdot \cos(\alpha) + c = 0$

Ich multipliziere beide Gleichungen:

$$\left[\overline{OP_1} - 2a \cdot \cos(\alpha) - c\right] \cdot \left[\overline{OP_1} - 2a \cdot \cos(\alpha) + c = 0\right] = 0$$

$$\left[\left(\overline{OP_1} - 2a \cdot \cos(\alpha)\right) - c\right] \cdot \left[\left(\overline{OP_1} - 2a \cdot \cos(\alpha)\right) + c = 0\right] = 0$$

$$\left(\overline{OP_1} - 2a \cdot \cos(\alpha)\right)^2 - c^2 = 0$$

Nun gilt im Dreieck BCS: $\cos(\alpha) = \dfrac{x_1}{\overline{OP_1}}$

Das wird eingesetzt: $\left(\overline{OP_1} - 2a \cdot \dfrac{x_1}{\overline{OP_1}}\right)^2 - c^2 = 0 \quad | \cdot \overline{OP_1}$

$$\left(\overline{OP_1}^2 - 2ax_1\right)^2 - c^2\overline{OP_1}^2 = 0$$

Schließlich ist nach Pythagoras: $\overline{OP_1}^2 = x_1^2 + y_1^2$

Damit folgt: $\left(x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1\right)^2 - c^2\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0$

Diese Beziehung gilt für jeden Punkt P_1 oder P_2, also kann man den Index 1 weglassen und hat dann Die Gleichung der Kurve, auf der sich P bewegt:

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 - c^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

Umrechnung in Polarkoordinaten:

$x = r \cdot \cos(\varphi), \ \ y = r \cdot \sin(\varphi)$ einsetzen:

$$\left(\underbrace{r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi)}_{=r^2} - 2ar \cdot \cos(\varphi)\right)^2 - c^2\left(\underbrace{r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi)}_{=r^2}\right) = 0$$

$$\left(r^2 - 2ar \cdot \cos(\varphi)\right)^2 = c^2 \cdot r^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

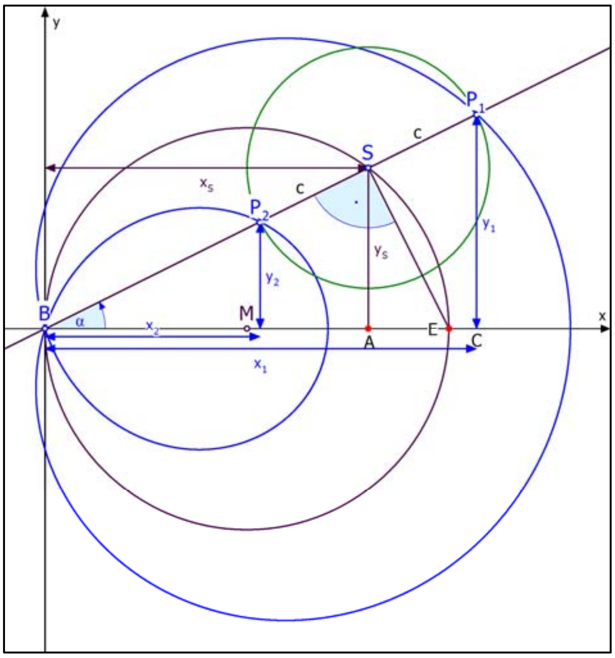
$$r^2 - 2ar \cdot \cos(\varphi) = \pm c \cdot r \qquad | : r \neq 0$$

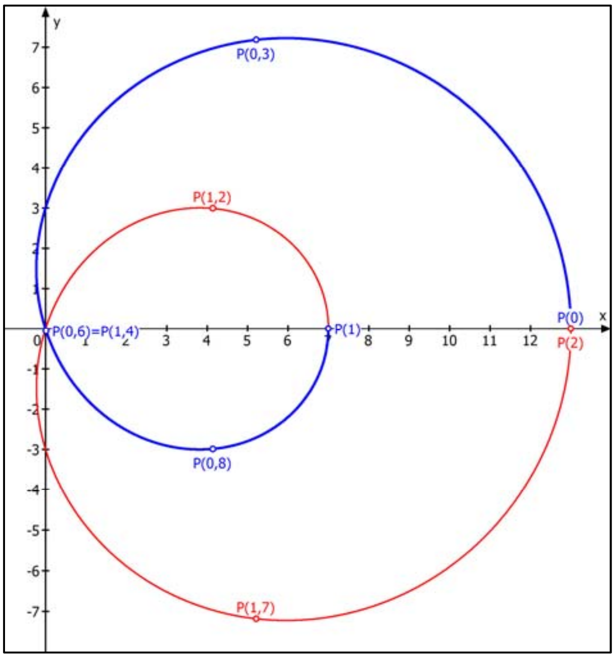
$$r - 2a \cdot \cos(\varphi) = \pm c$$

Ergebnis: $r = 2a \cdot \cos(\varphi) \pm c$

Links sehen Sie die Überlagerung der letzten Zeichnung mit der neuen Kreis-Konchoide.

Rechts zeige ich diese Kurve alleine.





Ich habe mit der Trace-Option von MatheGrafix wieder Kurvenpunkte ermittelt und die zugehörigen Vielfachen von π in Klammern gesetzt. P(0,3) bedeutet, dass man diesen Punkt mit $\varphi = 0{,}3\cdot\pi$ erhält.

Man erkennt daraus auch, wie man die Kurve für den Definitionsbereich **D =** $[\,0\,;2\pi\,[$ durchläuft.

Für $\varphi = 2\pi$ ist man wieder bei $\varphi = 0$ angekommen.

Bei dieser Kurve war a = 5 und b = 3. Die Gleichung lautete daher

$$\left(x^2+y^2-10x\right)^2-9\left(x^2+y^2\right)=0$$

bzw. $$r = 10\cdot\cos(\varphi)\pm 3,\quad \varphi\in[\,0\,;2\pi[\,.$$

Man kann +3 oder – 3 verwenden, das ergibt dieselbe Kurve, allerdings mit anderer φ – Zuordnung.

Nun gibt es auch noch eine **Parameterdarstellung:**

Herleitung:

Es ist $x(\varphi)=r\cdot\cos(\varphi)=\left(10\cdot\cos(\varphi)+3\right)\cdot\cos(\varphi) \Rightarrow x(\varphi)=10\cdot\cos^2(\varphi)+3\cdot\cos(\varphi)$

und $y(\varphi)=r\cdot\sin(\varphi)=\left(10\cdot\cos(\varphi)+3\right)\cdot\sin(\varphi) \Rightarrow y(\varphi)=10\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)+3\cdot\sin(\varphi)$

Man kann $\sin(2\varphi)=2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$ einsetzen, dann folgt: $y(\varphi)=5\cdot\sin(2\varphi)+3\cdot\sin(\varphi)$

Hier kann man wie schon zuvor bei der geraden Konchoide Zusatzrechnungen anstellen, wie die Bestimmung des Definitionsbereichs, die implizite Berechnung der Ableitung und die Existenz von senkrechten und waagrechten Tangenten.

Im Moment fertige ich dazu keine Lösung an.

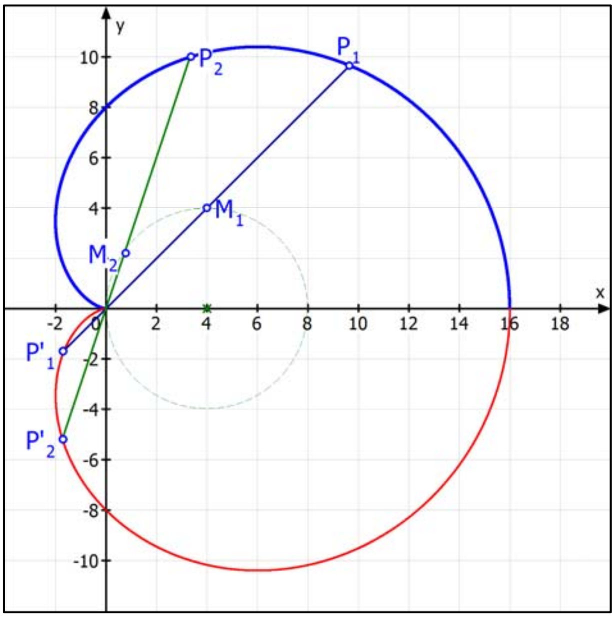
Diese Konchoide hat a = 4 und c = 8

Auf den dünn gezeichneten inneren Kreis wandert der Hundehalter. Befindet er sich in M_1, dann kann sein Hund bei einer Leinenlänge von 8 m in P_1 oder P'_1 sein.

Ist er in M_2, dann kommen P_2 und P'_2 in Frage. M_i ist stets der Mittelpunkt.

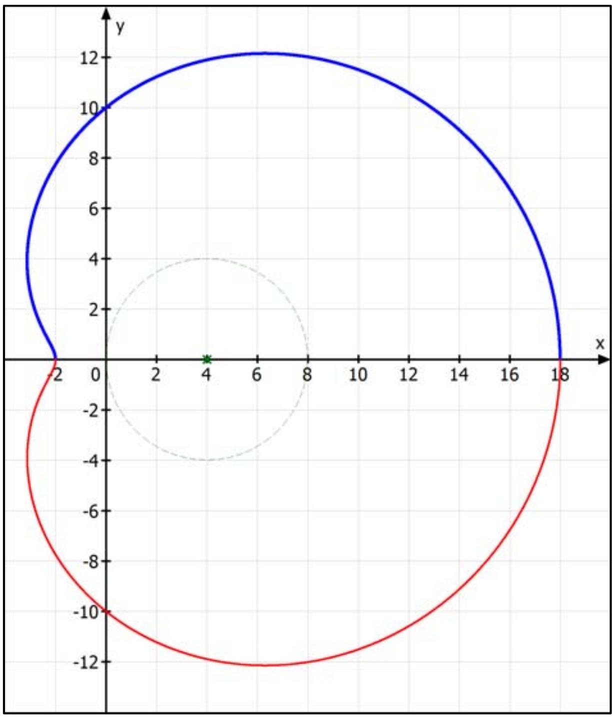
Bei a = 2c hat die Konchoide eine Spitze im Ursprung.

Man beachte allerdings, dass der Baum, also das Zielobjekt des Hundes auf dem Kreis liegt! Ist das nicht der Fall, ändert sich alles.



Jetzt verwende ich a = 4 und c = 10.

Die Leine ist nun so lang, dass der nicht zu bremsende Hund über das Ziel (Baum) hinausschießt und daher hinter dem Baum ankommt.



8 Anhang: Integralrechnung

Die Berechnung der Schleifenfläche führte auf dieses Integral: $F = \frac{1}{2} \int\limits_{2,2143}^{4.06889} \left(\frac{3}{\cos(\varphi)} + 5 \right)^2 d\varphi$

Gesucht ist die sehr schwere Berechnung der Stammfunktion:

$$\int \left(\frac{3}{\cos(\varphi)} + 5 \right)^2 d\varphi = \int \left(\frac{9}{\cos^2(\varphi)} + \frac{30}{\cos(\varphi)} + 25 \right) d\varphi$$

1. Teilintegral

$$A_1 = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x)$$

Denn $\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x) \cdot \sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

2. Teilintegral - 1. Version

$$A_2 = \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x) \cdot \sin(x)} dx = -\int \frac{1}{\cos(x) \cdot \sqrt{1 - \cos^2(x)}} \cdot (-\sin(x)) dx =$$

Diese trickreiche Erweiterung und Darstellung ist hilfreich für diese Substitution:

$$z = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad dz = -\sin(x) \cdot dx$$

$$A_2 = -\int \frac{1}{z \cdot \sqrt{1 - z^2}} dz$$

Als nächste Substitution ersetzt man $u = \sqrt{1 - z^2}$.

Umstellen nach z^2: $z^2 = 1 - u^2$

Dann ableiten: $2z \cdot dz = -2u \cdot du \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{u}{z} du = -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du$

$$A_2 = -\int \frac{1}{z \cdot \sqrt{1 - z^2}} dz = -\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2} \cdot u} \cdot \left(-\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du \right) = \int \frac{1}{1 - u^2} du$$

Dieses Integral knackt man mit der Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{1}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} du = \int \frac{A}{1 - u} du + \int \frac{B}{1 + u} du = ...$$

Nebenrechnung: $\frac{1}{(1 - u)(1 + u)} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} \qquad | \cdot (1 - u)(1 + u)$

$$1 = A \cdot (1 + u) + B(1 - u)$$

$$1 = A + Au + B - Bu$$

$$1 = (A + B) + (A - B)u$$

Hieraus folgt: $A + B = 1$ und $A - B = 0$. Also ist $A = B$.

Also folgt: $2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}$

$$A_2 = \int \frac{1}{1 - u^2} du = \int \frac{\frac{1}{2}}{1 - u} du + \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + u} du = -\frac{1}{2} \cdot \ln|1 - u| + \frac{1}{2} \cdot \ln|1 + u|$$

Jetzt macht man beide Substitutionen wieder rückgängig:

$u=\sqrt{1-z^2}$ und $z=\cos(x)$ ergibt $u=\sqrt{1-\cos^2(x)}=\sin(x)$

Das führt zu

$A_2=-\frac{1}{2}\cdot\ln|1-\sin(x)|+\frac{1}{2}\cdot\ln|1+\sin(x)|$

$$A_2=\int\frac{1}{\cos(x)}dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln|1+\sin(x)|-\ln|1-\sin(x)|\right)+C$$

Bei einem unbestimmten Integral sollte man immer + C anfügen.

2. Teilintegral - 2. Version

$$A_2=\int\frac{1}{\cos(x)}dx=\int\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}dx=\int\frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}dx=\int\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}dx$$

Substitution: $t=\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}$

Ableitung: $\frac{dt}{dx}=\frac{\cos(x)(1-\sin(x))-(-\cos(x))(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))^2}=\frac{2\cdot\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$

Also folgt: $dx=\frac{(1-\sin(x))^2}{2\cdot\cos(x)}\cdot dt$

$$A_2=\int\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}\cdot\frac{(1-\sin(x))^2}{2\cdot\cos(x)}\cdot dt=\int\frac{1}{(1+\sin(x))}\cdot\frac{(1-\sin(x))}{2}\cdot dt=\frac{1}{2}\int\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}dt$$

Nun den Bruch durch t ersetzen: $A_2=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\cdot\ln|t|$

$$A_2=\int\frac{1}{\cos(x)}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|+C$$

Zusammensetzen der Teilintegrale zur Flächenberechnung:

$$F=\frac{1}{2}\int_{2,2143}^{4.06889}\left(\frac{3}{\cos(\varphi)}+5\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{2,2143}^{4.06889}\left(\frac{9}{\cos^2(\varphi)}+\frac{30}{\cos(\varphi)}+25\right)d\varphi$$

$$F=\frac{1}{2}\cdot(9\cdot[A_1]_{2,2143}^{4,06889}+30[A_2]_{2,2143}^{4,06889}+[25\varphi]_{2,2143}^{4,06889})$$

$$F=\frac{1}{2}\cdot(9\cdot\left[\tan(\varphi)\right]_{2,2143}^{4,06889}+30\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\ln|1+\sin(x)|-\ln|1-\sin(x)|\right)\right]_{2,2143}^{4,06889}+[25\varphi]_{2,2143}^{4,06889})$$

Der Rest ist eine Fingerübung am Taschenrechner …

9 Lösung der Trainingsaufgabe

Die Konchoide mit der Spitze im Ursprung hat diese Gleichung: $(x-a)^2 \cdot (x^2+y^2) = a^2x^2$.

a) Berechne a so, dass die Kurve durch $P\left(2 \mid \sqrt{12}\right)$ geht.

Punktprobe durch Einsetzen: $(2-a)^2 \cdot (4+12) = 4a^2$

d. h. $16 \cdot (4-4a+a^2) = 4a^2 \qquad | :4$

$4(a^2-4a+4) = a^2$

$4a^2 - 16a + 16 = a^2 \qquad | - a^2$

Ordnen: $3a^2 - 16a + 16 = 0$

Quadratische Gleichung: $a_{1,2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 12 \cdot 16}}{6} = \dfrac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \dfrac{16 \pm 8}{6} = \begin{cases} 4 \\ \frac{4}{3} \end{cases}$

Es gibt also zwei solche Kurven.

b) Berechne implizit die Ableitung y' für a = 4.

Implizite Kurvengleichung: $(x-4)^2 \cdot (x^2+y^2) = 16x^2$

Alles nach links: $(x-4)^2 \cdot (x^2+y^2) - 16x^2 = 0$

Definiere: $F(x,y) = (x-4)^2 \cdot (x^2+y^2) - 16x^2$.

Partielle Ableitung nach x: $F_x = \underbrace{2 \cdot (x-4)}_{u'} \cdot \underbrace{(x^2+y^2)}_{v} + \underbrace{(x-4)^2}_{u} \cdot \underbrace{2x}_{v'} - 32x$

Mit der Produktregel, y^2 wird als konstante Zahl behandelt.

Partielle Ableitung nach y: $F_y = (x-4)^2 \cdot 2y$

Jetzt wird x als konstante Zahl behandelt, also ist $(x-4)^2$ ein konstanter Faktor, der beim Ableiten erhalten bleibt, während $-4x^2$ als konstanter Summand wegfällt.

Ableitungsformel: $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$

$$y' = -\frac{2 \cdot (x-4) \cdot (x^2+y^2) + (x-4)^2 \cdot 2x - 32x}{(x-4)^2 \cdot 2y} = -\frac{(x-4) \cdot (x^2+y^2) + (x-4)^2 \cdot x - 16x}{(x-4)^2 \cdot y}$$

wobei im Zähler der Faktor 2 ausgeklammert und weggekürzt worden ist.

Man kann in diesen Bruch einsetzen, kann ihn aber auch noch verändern:

$$y' = -\frac{x^3 - 4x^2 + xy^2 - 4y^2 + x^3 - 8x^2 + \cancel{16x - 16x}}{(x-4)^2 \cdot y} = -\frac{(2x-12)x^2 + (x-4)y^2}{(x-4)^2 \cdot y}$$

c) Stelle die Gleichung der Tangente in $P\left(2\,|\,\sqrt{12}\right)$ auf.

Ihre Steigung ist:

$$m = y'\left(2,\sqrt{12}\right) = -\frac{(2-4)\cdot(4+12)+(2-4)^2\cdot 2-16\cdot 2}{(2-4)^2\cdot\sqrt{12}} = -\frac{-2\cdot 16+8-32}{4\sqrt{12}} = -\frac{-56}{8\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

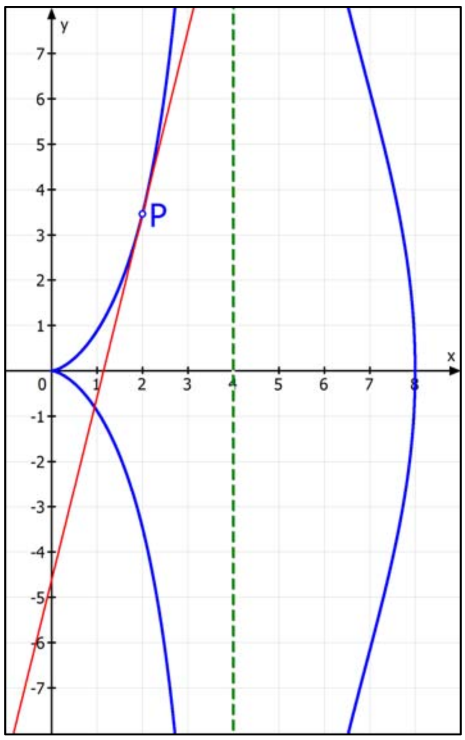
Oder mit der zweiten Formel berechnet:

$$m = y'\left(2,\sqrt{12}\right) = -\frac{(4-12)\cdot 4+(2-4)\cdot 12}{4\cdot\sqrt{12}} = -\frac{-32-24}{8\sqrt{3}} = \frac{56}{8\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

Punkt-Steigungs-Form: $y-2\sqrt{3} = \frac{7}{\sqrt{3}}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{7}{\sqrt{3}}x - \frac{14}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$

$$y = \frac{7}{\sqrt{3}}x - \frac{14}{3}\sqrt{3} + \frac{6}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{7}{3}\sqrt{3}\cdot x - \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

Hier die Abbildung dazu:



d) Gib eine Parametergleichung und eine Gleichung in Polarkoordinaten für K an.

Nach Seite 3 lautet die Parametergleichung für eine

Konchoide: $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} b+a\cdot\cos(\varphi) \\ b\cdot\tan(\varphi)+a\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

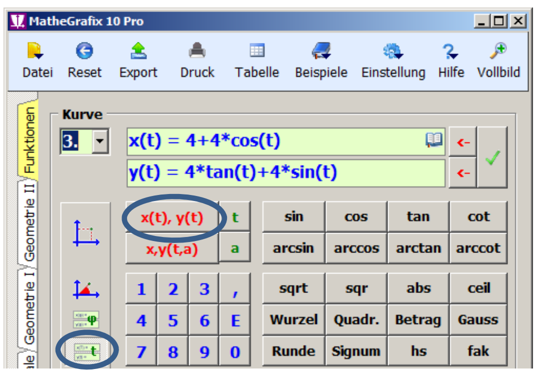
Hier ist a = b = 4: $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\cos(\varphi) \\ 4\cdot\tan(\varphi)+4\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

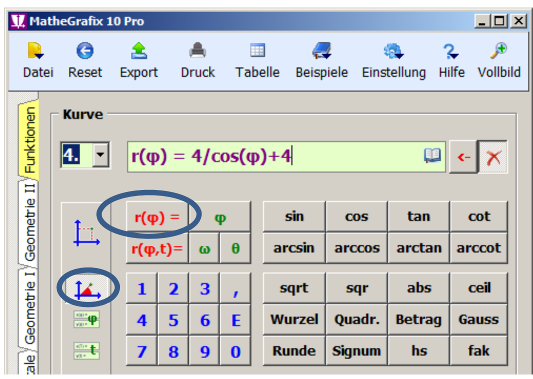
Und in Polarkoordinaten: $r = \frac{b}{\cos(\varphi)} + a$

Hier: $r = \frac{4}{\cos(\varphi)} + 4$

Da man in der Literatur oft anders aussehende Gleichungen sieht, etwa mit 2a statt a usw., eignet sich MatheGrafix hervorragend dazu, die Gleichungen zu testen.

Man kann Parametergleichungen eingeben, Gleichungen mit Polarkoordinaten





oder ganz normal nach y aufgelöste Ersatzfunktionen.